UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE FÈS
CYCLE PRÉPARATOIRE
MATIÈRE : ALGBREII

Année 2019/2020

CPI S_2

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIE 1

Exercice 1 Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 2A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} (sans méthode de GAUSS).

Exercice 2 Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} (sans méthode de GAUSS).

Exercice 3 On rappel que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$ où $E_{i,j}$ est la matrice ne comportant que 0 sauf le terme de place (i, j) qui vaut 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et l'application

$$u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto MA - AM$$

Montrer que u est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -4 & +5 & -6 \\ +7 & -8 & +9 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 5 Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont inversibles grâce à l'algorithme de GAUSS et donner leur inverse.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 On appelle matrice nilpotente toute matrice carrée N telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N^k = O$.

Scanned by TapScanner

1. Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. La somme de deux matrices nilpotente est-elle toujours nilpotente ?
3. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est inversible et donner son inverse.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a). Montrer que $M - I_3$ est nilpotente.
   (b). En déduire, grâce à la formule du binôme, l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode de pivot de GAUSS.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \quad (1)$$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de GAUSS.

(a) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ 10x-5y-6z=-10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de GAUSS.

$$(S_1) \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 3x-3y+3z+2t=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x-5y+5z+7t=0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} ax-by+t=a \\ bx+ay+z=b \\ y+az-bt=a \\ x+bz+at=b \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE FÈS
CYCLE PRÉPARATOIRE
MATIÈRE : ALGBREII

Année 2019/2020

CP1 S_2

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIE 2

Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer $det(M)$ en fonction de m, puis en déduire le rang de M.

Exercice 2 Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Expliciter $D = P^{-1}MP$, puis calculer D^n et M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par les relations de récurence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases} \quad (1)$$

En utilisant les questions précédentes, exprimer u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

Exercice 3 Calculer les déterminants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

où a, b, c et $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes.

Exercice 4 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_M : x \longmapsto det(xI_n - M)$ est une fonction polynôme de degré n.
2. Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.
3. Déterminer son terme en X^{n-1}.
4. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $M - \frac{1}{k}I_n$ est inversible.

Le polynôme χ_M est appelé le polynôme caractéristique de M.

Scanned by TapScanner

Exercice 5 Soit

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & a \\ 0 & \dots & b & a+b \end{vmatrix},$$

1. Montrer que

$$(\forall n \geq 4),\quad B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$$

2. En déduire que

$$(\forall n \geq 2),\quad B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 6 Calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier, $a_1, a_2, \dots, a_n$ des complexes, et $k \in [[0,n]]$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_1 & a_2^2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 8 Soit A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $CD = DC$ avec D inversible.

1. Montrer que

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC).$$

2. Montrer que c'est faux en général si $CD \neq DC$
3. Montrer que ce résultat subsiste si D n'est pas forcément inversible.

Exercice 9 On voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{C}$ sont de la forme $f : \quad z \longmapsto az + b\bar{z}$, où $a, b \in \mathbb{C}$.
2. Calculer $det(f)$ en fonction de a et b.
3. Donner une condition nécessaire pour que f soit un automorphisme.

Exercice 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice carrée d'ordre n à coéfficients entiers.

1. Expliquer pourquoi $det(M) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z}$ si et seulement si $det(M) \in \{-1, 1\}$.
3. Plus généralement, si A est un anneau commutatif, et $M \in \mathcal{M}_n(A)$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $det(M)$ pour que $M \in GL_n(A)$.

Scanned by TapScanner